Varianta 24

Subiectul I

a) $a=\frac{-1}{3}, b=\frac{-5}{3}$.

b) $z_1=i$, $z_2=-i$.

c) $\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=0$.

d) $\bar{z}=\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i$.

e) $\sin 30^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

f) $S_{ABC}=2$.

Subiectul II

1.

a) $m\in(-6,6)$.

b) $a=\frac{3}{2}$.

c) $b=\frac{3}{2}$.

d) Avem $5\cdot 5=25$ posibilități.

e) $T_6=4536\sqrt{3}$.

2.

a) $f'(x)=\frac{x+1}{x}$.

b) Obținem că $f'(x)=\frac{x+1}{x}>0, \forall x\in(0,\infty)$, deci funcția f este crescătoare pe $(0,\infty)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}[f(n+1)-f(n)]=1$.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$.

e) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx=e-\frac{1}{2}$.

Subiectul III

a) Obținem $x_1=8$ și $x_2=2$.

b) $\det A = 16$.

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 34 & 30 \\ 30 & 34 \end{pmatrix}$.

d) $x_1 + x_2 = 10$ şi $x_1 x_2 = 16$.

e) Prin calcul direct se obține $f(A) = O_2$.

f) Sistemul este sistem omogen şi are numai soluția banală : $x = 0, y = 0$.

g) Vom demonstra prin inducție.

Pentru $n = 2$ se verifică.

Presupunând adevărat că $A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^k + 2^k & 8^k - 2^k \\ 8^k - 2^k & 8^k + 2^k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$; demonstrăm

că $A^{k+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^{k+1} + 2^{k+1} & 8^{k+1} - 2^{k+1} \\ 8^{k+1} - 2^{k+1} & 8^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}$.

Dar $A^{k+1} = A^k \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^k + 2^k & 8^k - 2^k \\ 8^k - 2^k & 8^k + 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^{k+1} + 2^{k+1} & 8^{k+1} - 2^{k+1} \\ 8^{k+1} - 2^{k+1} & 8^{k+1} + 2^{k+1} \end{pmatrix}$.

Ambele etape ale inducției fiind verificate , deducem că $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8^n + 2^n & 8^n - 2^n \\ 8^n - 2^n & 8^n + 2^n \end{pmatrix}$,

$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$.

b) $f''(x) = 12x^2 + 6x + 2 = 2(6x^2 + 3x + 1)$. Cum $6x^2 + 3x + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$
$f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ şi prin urmare funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 4x^3 = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 4x^3 = -\infty$.

d) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^4 + x^3 + x^2 + 1)dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{107}{60}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - 1}{x(e^x - 1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}(x^2 + x + 1) = 1 \cdot 1 = 1$.

f) Am arătat la punctul **b)** că funcția f' este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.
Atunci dacă $x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0$ şi dacă $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$.
Rezultă $x = 0$ este punct de minim local.Deci $f(x) \geq f(0) = 1, \ \forall x \in \mathbf{R}$.

g) Din punctul **f)** rezultă că $f(x) \geq 1, \ \forall x \in \mathbf{R}$ şi $f(y) \geq 1, \ \forall y \in \mathbf{R}$.
Însumând cele două relații rezultă că $f(x) + f(y) \geq 2$ cu egalitate dacă
$f(x) = f(y) = 1$. Obținem $x = y = 0$.